МАТЕМАТИКА

Вступительное испытание

Тест

Продолжительность выполнения теста – 90 минут.

Тест состоит из 20 вопросов.

В каждом вопросе предполагается один правильный ответ.

Максимальная оценка составляет 100 баллов.

Перевод количества правильных ответов в стобалльную шкалу:

Правильные ответы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Баллы	8	16	24	32	40	44	48	52	56	60
Правильные ответы	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
Баллы	64	68	72	76	80	84	88	92	96	100

Запрещается использовать справочные материалы, средства связи и электронно-вычислительную технику (кроме той, которая используется для сдачи вступительного испытания на основе дистанционных технологий).

Пример теста по математике

Вариант 2 (ОмГУ, июль 2019)

1. Вычислите значение выражения $\left(\frac{1}{5}+0{,}3\right):\frac{1}{14}$.

A) 1 B) 7 C) $\frac{1}{7}$ D) 6

Найдем значение в скобках: $\frac{1}{5}+0{,}3=0{,}2+0{,}3=0{,}5$.

Тогда $\left(\frac{1}{5}+0{,}3\right):\frac{1}{14}=0{,}5\cdot 14=7$.

Ответ: B.

2. Упростите выражение: $\dfrac{a^{-1}\cdot a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}}$.

A) 1 B) a C) a^{-1} D) a^{3}

Произведем вычисление в числителе: $a^{-1}\cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{(-1)+\frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$.

Тогда $\dfrac{a^{-1}\cdot a^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = 1$.

Ответ: A.

3. Решите уравнение $2^{2x+1} = \frac{1}{2}$.

A) 1 B) – 0,5 C) – 1 D) 0

Поскольку $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, то

$$2^{2x+1} = 2^{-1},$$
$$2x + 1 = -1,$$
$$x = -1.$$

Ответ: C.

4. По тарифу «Студенческий» стоимость одного SMS-сообщения равна 70 коп. У Бориса на счету 60 рублей. Какое максимальное количество сообщений он сможет отправить?

A) 86 B) 90 C) 80 D) 85

60 рублей – это 6000 копеек. Поскольку $6000:70=\frac{6000}{70}=\frac{600}{7}=85\frac{5}{7}$, то наибольшее возможное количество сообщений – 85.

Ответ: D.

5. Известно, что $a=-1, b=0,4$. Какое из перечисленных чисел является наибольшим?

A) $-a+b$ B) $a+b$ C) $a \cdot b$ D) a/b

Поскольку

$$-a+b=1+0,4=1,6;$$
$$a+b=-1+0,4=-0,6;$$
$$a \cdot b=(-1) \cdot 0,4=-0,4;$$
$$a/b=-1/0,4=-2,5,$$

то наибольшее число – в пункте А.

Ответ: А.

6. Решите неравенство: $3(1+x)\geq 13$. Какое наименьшее целое число удовлетворяет данному неравенству?

A) 3 B) 5 C) 4 D) 6

$$3(1+x)\geq 13,$$
$$3+3x\geq 13,$$
$$3x\geq 10,$$
$$x\geq \frac{10}{3},$$
$$x\geq 3\frac{1}{3}.$$

Наименьшее целое число, удовлетворяющее данному неравенству – это 4.

Ответ: C.

7. В школе 40 учеников, каждый из которых участвовал в олимпиаде по одному предмету. Четверть школьников – в олимпиаде по математике, 30% школьников – по физике, остальные – по информатике. Сколько учеников участвовали в олимпиаде по информатике?

A) 12 B) 18 C) 22 D) 10

В олимпиаде по математике участвовало 40 : 4 = 10 учеников, по физике – $40 \cdot \frac{30}{100} = 12$ учеников, тогда в олимпиаде по информатике участвовало 40 – 10 – 12 = 18 учеников.

Ответ: B.

8. Основания равнобедренной трапеции равны 12 и 28, а боковая сторона равна 10. Найдите площадь трапеции.

A) 120 B) 60 C) 50 D) 240

Проведем высоты AE и BF трапеции $ABCD$ с основаниями $AB = 12$ и $CD = 28$, как на рисунке. Имеем $EF = AB = 12$, $DE = FC = 8$. В прямоугольном треугольнике ADE $AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = 6$, высота трапеции равна 6. Тогда площадь трапеции равна $S = \dfrac{12+28}{2} \cdot 6 = 120$.

Ответ: А.

9. Решите уравнение: $\sqrt{x+2}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите меньший из корней.

A) –1 B) 0 C) 4 D) 2

При возведении в квадрат получается уравнение

$$x+2=x^2,$$

$$-x^2+x+2=0,$$

корни квадратного уравнения $x_1=2$, $x_2=-1$.

Проверка показывает, что $x_1=2$ – корень исходного уравнения, а $x_2=-1$ – не является корнем.

Ответ: D.

10. Из множества натуральных чисел от 7 до 16 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно не делится на 4?

A) 0,5 B) 0,3 C) 0,7 D) 1

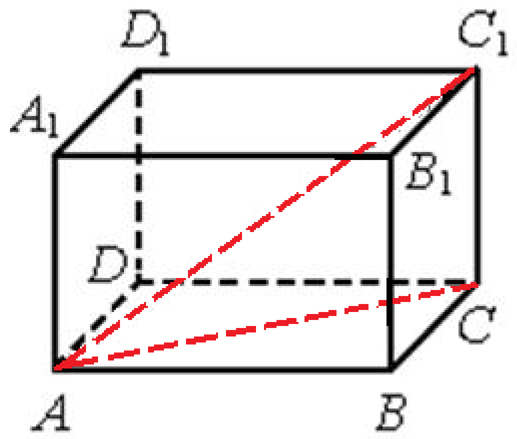
В данном множестве 16 – 6 = 10 чисел, из них три делятся на 4 (это числа 8, 12 и 16). Тогда на 4 не делится семь чисел.

Искомая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов, то есть $\frac{7}{10} = 0{,}7$.

Ответ: C.

11. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 6$, $AD = 8$ и боковое ребро $AA_1 = 10$. Найдите величину угла AC_1C, где AC_1 – диагональ параллелепипеда.

A) 60° B) 45° C) 90° D) 30°



В треугольнике ACC_1 имеем $CC_1 = AA_1 = 10$, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$, угол ACC_1 – прямой, поскольку прямая CC_1 перпендикулярна плоскости $ABCD$. Тогда треугольник ACC_1 – равнобедренный прямоугольный, а угол AC_1C равен 45°.

Ответ: B.

12. Из городов A и B, расстояние между которыми равно 320 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 2 часа на расстоянии 180 км от города A, двигаясь с постоянными скоростями. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города B.

A) 70 B) 90 C) 80 D) 65

От места встречи до города B расстояние составляет $320 - 180 = 140$ км. Это расстояние проехал автомобиль, выехавший из города B. Тогда его скорость равна $\frac{140}{2} = 70$ км в час.

Ответ: A.

13. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 2t^2 + 3t - 1$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени t = 8 с.

A) 32 B) 34 C) 35 D) 30

Поскольку

$$v(t) = x'(t) = \left(2t^2 + 3t - 1\right)' = 4t + 3,$$

то

$$v(8) = 4 \cdot 8 + 3 = 35.$$

Ответ: C.

14. Вычислите $\cos^2 75° - \sin^2 75°$.

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 1 D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

По формуле двойного угла

$$\cos^2 75° - \sin^2 75° = \cos(2 \cdot 75°) = \cos 150°,$$

а по формулам приведения

$$\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: D.

15. В цилиндрическом сосуде уровень воды достигает 15 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй сосуд, диаметр которого в 2 раза меньше первого? Ответ выразите в см.

A) 60 B) 30 C) 7,5 D) 90

Вода занимает в цилиндрическом сосуде объем цилиндра высоты 15 см с диаметром основания d_1, ее объем равен $V = \pi r^2 h_1 = \frac{15}{4}\pi d_1^{\ 2}$. Во втором сосуде имеем $V = \pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi d_2^{\ 2} h = \frac{1}{16}\pi d_1^{\ 2} h$.

Тогда из равенства $\frac{15}{4}\pi d_1^{\ 2} = \frac{1}{16}\pi d_1^{\ 2} h$ получаем $h = 60$.

Ответ: A.

16. Найдите наибольшее значение функции $y=\sqrt{-x^2-4x+5}$.

A) 9 B) 3 C) $\sqrt{5}$ D) 5

У квадратичной функции $f(x)=-x^2-4x+5$ наибольшее значение достигается в вершине параболы $x_0=-\dfrac{-4}{2\cdot(-1)}=-2$ и равно $f(-2)=-(-2)^2-4\cdot(-2)+5=-4+8+5=9$.

Тогда у исходной функции наибольшее значение равно 3.

Ответ: B.

17. Найдите наименьший корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[0,\pi]$.

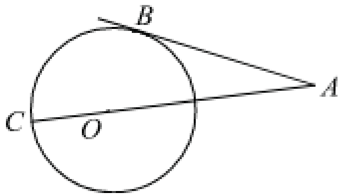
A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{2\pi}{3}$ D) 0

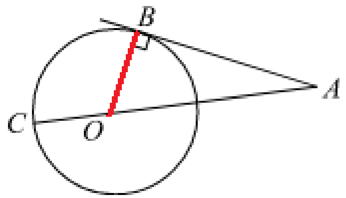
Решая данное уравнение, получаем $\frac{\pi}{2}+2x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $2x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{12}+\pi n$, откуда имеем две серии корней: $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$. В первой серии наименьшее неотрицательное решение – это $x_1=\frac{5\pi}{6}$, во второй серии наименьшее неотрицательное решение – это $x_2=\frac{2\pi}{3}$. Тогда наименьший корень на промежутке $[0,\pi]$ – это x_2.

Ответ: C.

18. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 15$, $AC = 25$.

A) 16 B) 8 C) 10 D) 15





Пусть O – центр окружности. Радиус OB перпендикулярен касательной AB, поэтому треугольник AOB – прямоугольный. Пусть $OB = OC = x$. Тогда $AO = 25 - x$, и по теореме Пифагора в треугольнике AOB $(25-x)^2 = x^2 + 15^2$, $625 - 50x + x^2 = x^2 + 225$, $50x = 400$, $x = 8$, диаметр окружности равен 16.

Ответ: A.

19. Решите неравенство $\log_2 x - \log_{0,5}(x-1) < \log_2 6$.

A) $(3, +\infty)$ B) $(-2, 3)$ C) $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$ D) $(1, 3)$

Неравенство задано на множестве $\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ x > 1, \end{cases}$ $x > 1$. На данном множестве преобразуем неравенство. Учитывая, что $0,5 = 2^{-1}$, имеем $\log_2 x - \log_{2^{-1}}(x-1) < \log_2 6$, $\log_2 x + \log_2(x-1) < \log_2 6$, $\log_2\left(x(x-1)\right) < \log_2 6$, $x(x-1) < 6$, $x^2 - x - 6 < 0$, $x \in \left(-2;3\right)$. Учитывая область задания неравенства, получаем $x \in \left(1;3\right)$.

Ответ: D.

20. Найдите наибольшее целое значения параметра a, при котором неравенство $ax^2-(a-1)x+a+2<0$ выполняется при всех значениях x.

A) -3 B) -4 C) 2 D) -5

При $a=0$ получаем линейное неравенство $x+a+2<0$, которое не выполняется при всех значениях x.

При $a\neq 0$ неравенство является квадратным. Оно выполняется при всех x, если и старший коэффициент, и дискриминант отрицательны, то есть при $\begin{cases} a<0, \\ (a-1)^2-4a(a+2)<0, \end{cases}$ $\begin{cases} a<0, \\ a^2-2a+1-4a^2-8a<0, \end{cases}$ $\begin{cases} a<0, \\ -3a^2-10a+1<0, \end{cases}$

$a<\dfrac{-10-\sqrt{112}}{6}$. Наибольшее целое значение a – это $a=-4$.

Ответ: B.