МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского»

«Утверждаю»
Проректор по научной работе
_______________ П.В. Прудников
«_____» _____________ 2022 г.

Программа вступительного испытания
в аспирантуру по специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Омск
2022

Регламент вступительного испытания

1. Каждому из поступающих экзаменационная комиссия предлагает два вопроса по своему выбору.

2. На подготовку ответов испытуемым предоставляется 45 минут.

3. Конспект ответов испытуемые излагают на бланке листа устного ответа, предоставленном приёмной комиссией, после чего излагают свои ответы членам предметной комиссии, которые фиксируют своё мнение по каждому ответу на том же бланке.

4. Члены комиссии имеют право задавать испытуемым дополнительные (уточняющие) вопросы.

5. По каждому из вопросов испытуемый может получить до 50 баллов и до 100 баллов включительно в сумме. Эта сумма является оценкой вступительного испытания.

6. Решения принимаются экзаменационной комиссией коллегиально и закрепляются подписями членов комиссии в листе устного ответа.

Содержание программы

1. АЛГЕБРА

1.1 Многочлены.

Теория делимости многочленов от одной буквы. Производная и выделение кратных множителей. Неприводимые многочлены; Неприводимость над полями Q, R, C. Рациональные дроби. Интерполяция. Многочлены от нескольких переменных; симметрические многочлены.

1.2 Матрицы.

Алгебра матриц. Элементарные преобразования строк, столбцов матрицы. Разложение матрицы в произведение диагональной матрицы и трансвекций. Метод Гаусса приведения матрицы к трапециидальному виду. Теория определителей. Решение систем линейных уравнений. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Обратимые матрицы; группа обратимых матриц.

1.3 Векторные пространства.

Подпространства. Линейные отображения, функционалы, преобразования. Кольцо линейных преобразований; его изоморфизм с кольцом матриц. Ядро, образ, собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Теорема о нормальной жордановой форме матрицы.

1.4 Эвклидовы и унитарные пространства, квадратичные и билинейные формы.

Аксиоматика унитарных и эвклидовых пространств. Линейные отображения унитарных пространств; сопряжённые преобразования. Нормальные линейные преобразования и их свойства. Унитарные (ортогональные), симметрические, кососимметрические линейные преобразования и свойства их матриц. Квадратичные и билинейные формы; матричная запись, переход к новым переменным. Приведение квадратичной формы к каноническому виду; закон инерции. Приведение квадратичной формы к главным осям.; приложение к теории поверхностей второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА:

1. А.И. Кострикин, Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. М.: Наука, 2004. 495 с.
2. А.И. Кострикин, Ю.И. Манин. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1980. 304 с.

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.

2.1 Алгебра логики и исчисления высказываний.

Таблицы истинности; логические связки. Полные системы связок; теорема о ДНФ и КНФ. Система аксиом для исчисления высказываний. Теорема дедукции.

2.2 Элементы теории алгоритмов.

Машина Тьюринга. Рекурсивные функции, их вычислимость на машине Тьюринга. Понятие об алгоритмически неразрешимых проблемах.

2.3 Узкое исчисление предикатов.

Кванторы. Интерпретации. Выполнимость и истинность. Понятие о модели. Свойства теорий первого порядка. Теорема о полноте. Предваренная нормальная форма.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Э. Мендельсон, Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971, 320 с.
2. П. С. Новиков, Элементы математической логики. М.: Наука, 1973, 399 с.
3. А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1965, 392 с.

3 ВЕЩЕСТВЕННЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ.

3.1. Математический анализ.

Теория пределов. Теория рядов. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема о средних значениях, теорема о неявных функциях, формула Тейлора).

Основные теоремы интегрального исчисления (теоремы о замене переменных; теоремы о повторных интегралах; формулы Грина, Остроградского, Стокса).

3.2. Основы функционального анализа.

Конечномерные вещественные пространства (характеризация открытых, замкнутых и компактных множеств).

Основные теоремы о сходимости последовательностей измеримых функций (теорема Егорова).

Определения и основные свойства интеграла Лебега. Теоремы Лебега, Де-ви, Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фубини.

Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса.

Основные нормированные пространства, Полнота, сепарабельность, критерий компактности, сильная и слабая сходимости.

Гильбертовы пространства. Теоремы Рисса-Фишера. Ряды и интегралы Фурье.

3.3. Основы теории функций комплексного переменного.

Условия Коши - Римана. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Точки ветвления и римановы поверхности.

Комплексное интегрирование. Теорема Коши. Интеграл типа Коши. Теорема Морера.

Ряды Тейлора и Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. Принцип модуля и аргумента для аналитических функций. Элементы теории вычетов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1-3.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.
3. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.

4 ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА.

4.1. Элементы дискретного анализа.

Функции алгебры логики. Формулы, реализация функций формулами. Эквивалентность формул и свойства элементарных функций. Двойственность, принцип двойственности. Полнота и замкнутость. Совершенная нормальная форма (НФ). ДНФ, КНФ, минимальная НФ, тупиковая НФ. Синтез схем, функция Шеннона.

Алфавитные коды и их свойства. Избыточность, код оптимальный и близкий к оптимальному, коды Фано и Шеннона. Код Хэмминга, кодирование и декодирование.

4.2. Элементы теории графов

Графы, основные классы графов. Маршруты, цепи, циклы. Связность, компоненты связности. Эйлеровы циклы и цепи. Теорема Эйлера. Гамильтоновы циклы и цепи. Теоремы Оре и Дирака. Деревья, определение и критерии. Двудольные графы. Теорема Кенига. Ориентированные графы. Сильная, односторонняя и слабая связность. Критерии сильной и слабой связности орграфа.

4.3. Элементы теории сложности

Массовая и индивидуальная задачи. Примеры. Задачи распознавания свойств. Трудоемкость алгоритма, полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы. Класс P. Недетерминированные алгоритмы и класс NP. Полиноминальная сводимость и NP-полные задачи. Теорема о сложности NP-полных задач. Сводимость по Тьюрингу и NP-трудные оптимизационные задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. (Ред. Яблонский С.В. и Лупанов О.Б.)